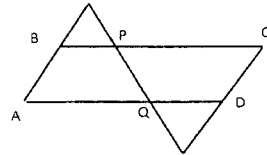


Открытая олимпиада ШЮМ по математике. Март, 2016г.

7 класс



1. Два равных правильных треугольника приложили друг к другу и продлили их стороны, как показано на рисунке. Периметр четырехугольника ABCD равен 8. Чему равна длина отрезка PC?

Ответ: 2. Решение: Периметр четырехугольника ABCD равен $AB+BP+PC+CD+DQ+QA$. Длина отрезка PC равна длине стороны правильного треугольника. Треугольники AMQ и PCN равны, $PC=CN=NP=AM=MQ=AQ=x$. В правильном треугольнике каждый из углов равен 60° . $\angle BMP = \angle QPC = 60^\circ$ (вертикальные), значит в треугольнике MBP $MB=BP$, $AB+BP=AB+BM=AM=x$. $\angle AQP = \angle NQD = 60^\circ$ (вертикальные), значит в треугольнике NQD $NQ=QD$, $CD+DQ=CD+DN=x$. Периметр четырехугольника ABCD равен $AB+BP+PC+CD+DQ+QA=4x$. $x=2$.

2. В классе 21 ученик. Чему может равняться число девочек в этом классе, если ни у каких 2-х девочек количество друзей-мальчиков из этого класса не совпадают?

Ответ: число девочек не более 11. Решение: Пусть в классе x девочек, тогда мальчиков $21-x$. Возможное число друзей мальчиков у девочек класса от 0 до $21-x$, т.е. $22-x$ вариант. Значит девочек не более, чем $22-x$. Значит $x \leq 22-x$, $x \leq 11$. Примеры: Если девочка одна, то мальчиков 20, она может дружить с любым их числом от 0 до 20. Если девочек 11, то первая не дружит ни с кем из мальчиков, вторая с одним, третья с двумя, и т.д. одиннадцатая с десятью. Аналогично и все другие варианты возможны.

3. Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха – уменьшается на 10%. Могло ли после нескольких выстрелов у него оказаться: а) 89 рублей 10 копеек, б) 72 рубля 30 копеек.

Ответ: а) да, б) нет. Решение: а) $100 \cdot 1,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 89,1$ Такая сумма будет после одного удачного и двух неудачных выстрелов. б) Сумма после нескольких выстрелов получается путем умножения 100 на числа 1,1 или 0,9 взятых возможно несколько раз. Но тогда полученная сумма после умножения на соответствующую степень числа 10 должна делиться на 11 или на 9. 7230 на эти числа не делится.

4. С полудня до полуночи Кот Учёный спит под дубом, а с полуночи до полудня рассказывает сказки. На дубе он повесил плакат «Через час я буду делать то же самое, что делал 2 часа назад». Сколько часов в сутках эта надпись верна?

Ответ: 18. Решение: Надпись не верна, если до полуночи или до полдня осталось не более часа, так как в этом случае через час его занятие изменится. Не верна надпись и в продолжении двух часов после полночи и полдня, т.к. в этих случаях два часа назад занятие было другим. Таким образом надпись не верна 6 часов в сутки, значит верна $24-6=18$ часов в сутки.

5. Малыш подарил Карлсону 111 конфет. Сколько-то конфет они тут же съели вместе, 45% оставшихся конфет пошли Карлсону на обед, а треть конфет, оставшихся после обеда, нашла во время уборки Фрекен Бок. Сколько конфет она нашла?

Решение: Ответ: 11. Решение: Пусть у Карлсона перед обедом было n конфет. Тогда после обеда их осталось $\frac{55}{100}n$, а Фрекен Бок нашла $\frac{1}{3} \cdot \frac{55}{100}n = \frac{11}{60}n$ конфет. Так как количество конфет должно быть целым числом, $11n$ должно делиться на 60. Поскольку числа 11 и 60 взаимно простые, то n должно быть кратно 60. Существует единственное число, делящееся на 60 и меньшее 111, это число 60. Таким образом, $n=60$, значит, Фрекен Бок нашла 11 конфет.